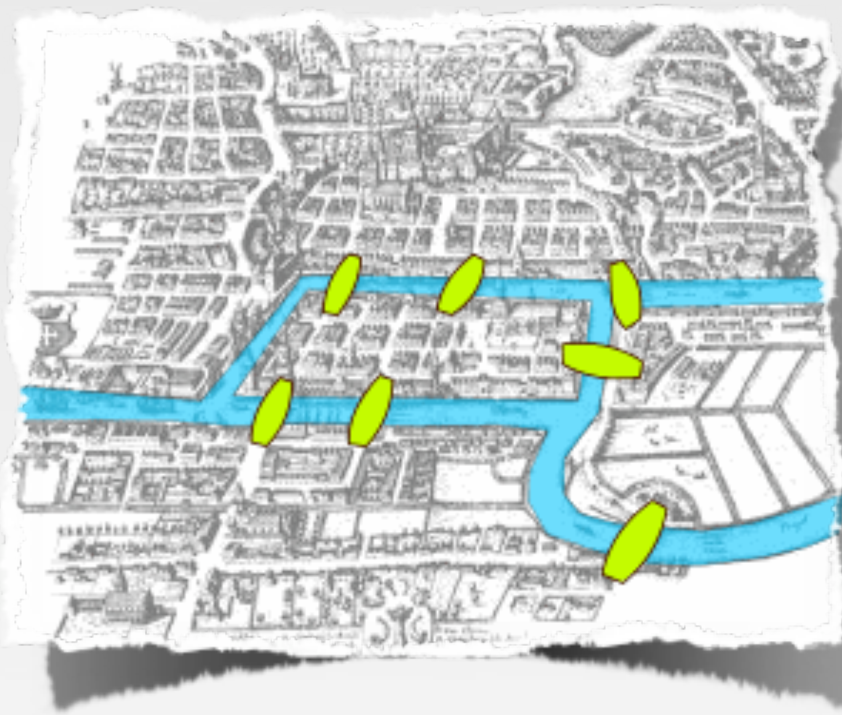
Eulerkreise



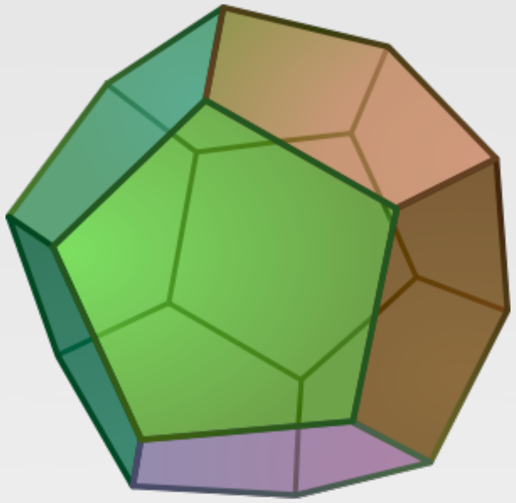
- Leonhard Euler (1707-1783)
  - Eulers Abhandlung über das Königsberger Brückenproblem gilt als die Geburtsstunde der Graphentheorie.
- Def.: Ein Eulerweg $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ist ein einfacher Weg mit $v_1 \neq v_k$, der alle Kanten eines Graphen enthält.
- Def.: Ein Eulerkreis ist ein Kreis, der alle Kanten eines Graphen enthält.

Finden von Eulerkreisen

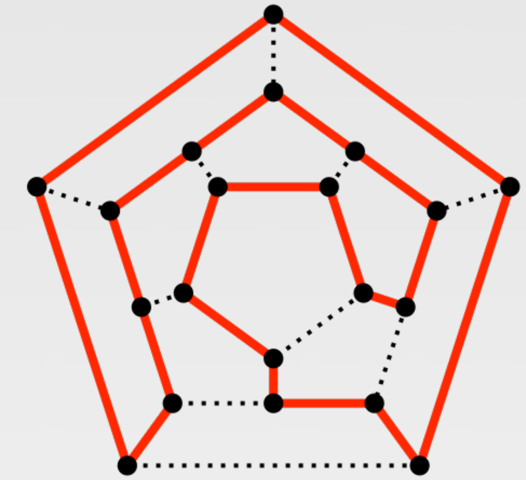
- Satz von Euler (1736): Ein zusammenhängender Graph enhält genau dann einen Eulerkreis wenn alle Knoten geraden Grad haben.
  - von links nach rechts: Jeder Knoten muss über eine andere Kante verlassen werden als er betreten wurde
  - von rechts nach links: Hierholzers Algorithmus (1873)
    - Finde einen Kreis K ausgehend von einem beliebigen Knoten
    - While $\exists u \in K, v \in V \setminus K: \{u,v\} \in E$
    - Finde einen Kreis K' ausgehend von v ohne Kanten aus K
    - Füge Kreis K' in Kreis K ein
    - Endwhile
- Lineare Laufzeit
  - Zusatzzeiger für jede Adjazenzliste

Variationen

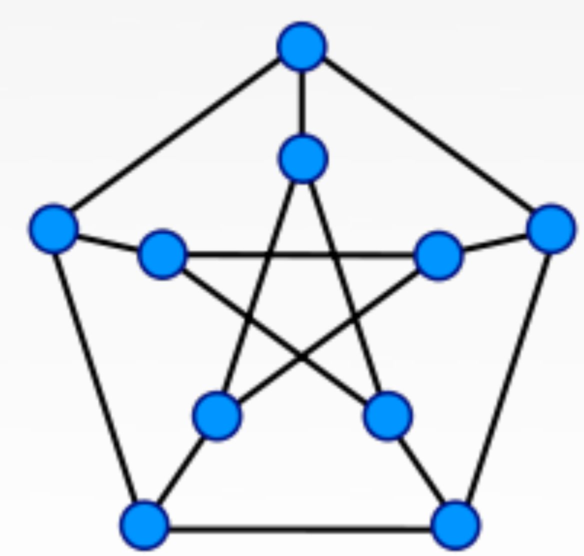
- Eulerweg
  - Ein zusammenhängender Graph enthält genau dann einen Eulerweg, wenn er genau zwei Knoten mit ungeradem Grad enthält.
- Gerichtete Eulerkreise/Eulerwege
  - Ein zusammenhängender gerichteter Graph enhält genau dann einen Eulerkreis, wenn indeg(v)=outdeg(v) für alle Knoten $v \in V$ gilt.
  - Ein zusammenhängender gerichteter Graph enthält genau dann einen Eulerweg, wenn es Knoten $u,v \in V$ mit outdeg(u)=indeg(u)+1 und indeg(v)=outdeg(v)+1 gibt und indeg(w)=outdeg(w) für alle $w \in V \setminus \{u,v\}$ gilt.



Hamiltonkreise



- Sir William Hamilton (1805-1865)
  - Irisches Universalgenie
- Def.: Ein Hamiltonpfad ist ein Pfad, der alle Knoten eines Graphen enthält.
- Def.: Ein Hamiltonkreis ist ein Kreis, der alle Knoten eines Graphen genau einmal enthält
  - Beispiel: Petersen-Graph ($\overline{L(K_5)}$)
    - enthält keinen Hamiltonkreis (aber Hamiltonpfade)
    - kleinster 3-reguläre, brückenlose Graph ohne Hamiltonkreis
    - kleinster Graph, der nach der Entfernung eines beliebigen Knotens einen Hamiltonkreis enthält.



Finden von Hamiltonkreisen (1)

- Intuitiv ist klar, dass die Existenz eines Hamiltonenkreises umso wahrscheinlicher wird, je mehr Kanten ein Graph enthält.

- Satz (Bondy und Chvátal, 1972): Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit $u,v \in V$, so dass $deg(u)+deg(v) \geq |V|$, und $G'=(V,E \cup \{u,v\})$. Dann enthält G genau dann einen Hamiltonkreis wenn G' einen enthält.
  - Beweis: Tafel

- Korollar (Dirac, 1952): Jeder Graph mit $deg(v) \geq |V|/2$ für alle $v \in V$ enthält einen Hamiltonkreis.

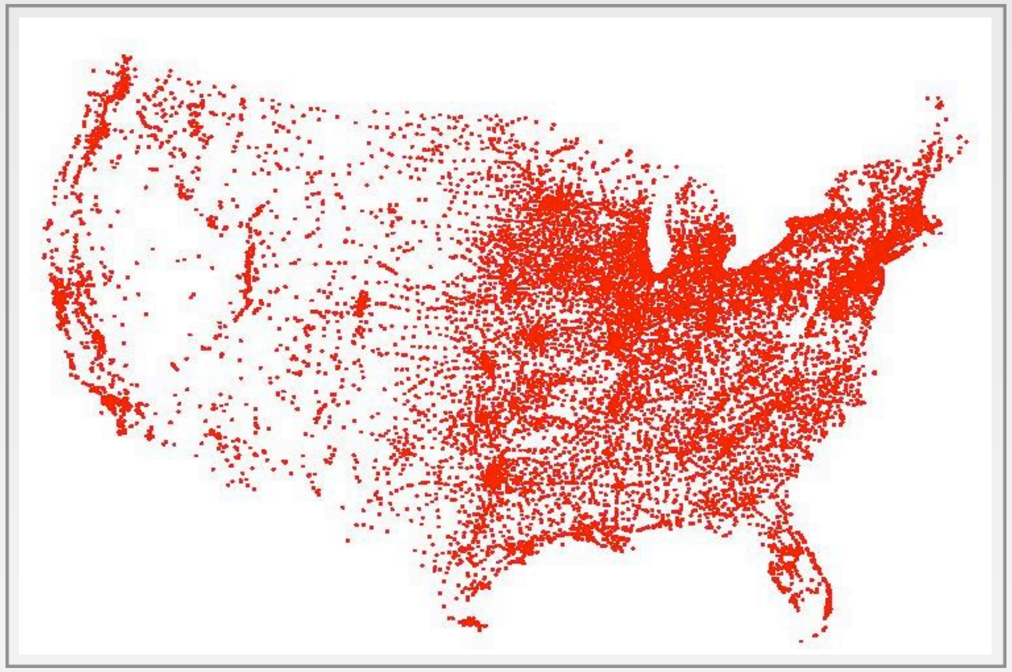
Finden von Hamiltonkreisen (2)

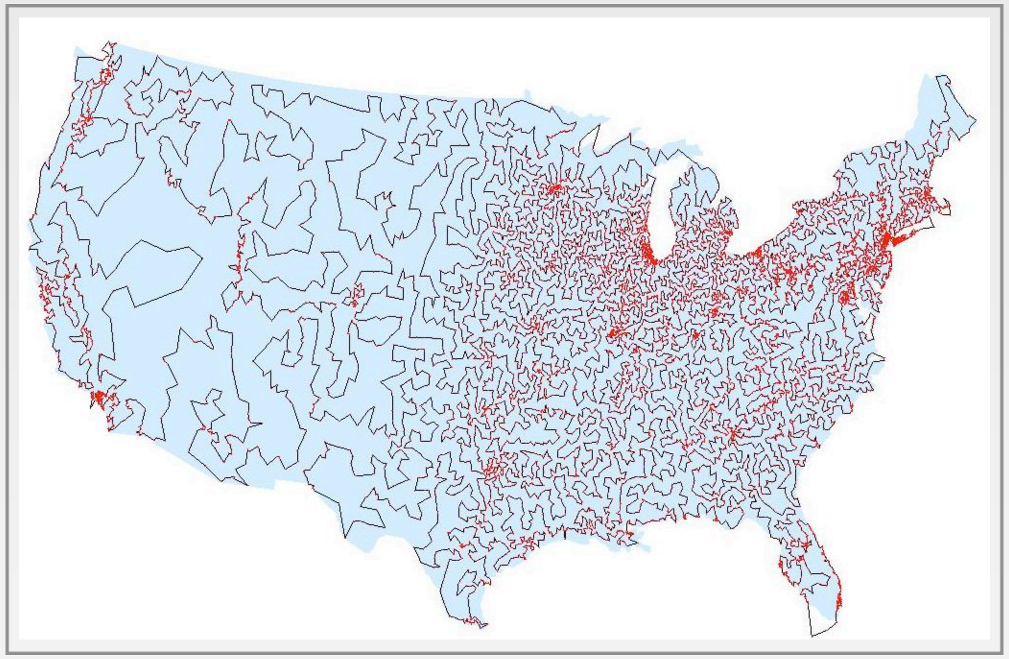
- Satz: Zu entscheiden, ob ein gerichteter Graph einen Hamiltonkreis/Hamiltonpfad enthält ist NP-vollständig.
  - Beweiskonstruktion: Tafel
  - Problem ist in NP
  - Reduktion ist in polynomieller Zeit durchführbar
  - φ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ G enthält einen Hamiltonkreis/Hamiltonpfad

- Korollar: Zu entscheiden, ob ein ungerichteter Graph einen Hamiltonkreis/Hamiltonpfad enthält ist NP-vollständig.
  - Beweis: Reduktion vom gerichteten Fall

- Korollar: Es gibt keinen effizienten Algorithmus, um den längsten Pfad zwischen zwei Knoten zu finden wenn $P \neq NP$.

Handlungsreisende





- Def.: Sei G ein gewichteter vollständiger Graph. Das Problem des Handlungsreisenden besteht darin einen Kreis minimaler Länge zu finden, der alle Knoten enthält.
  - Entscheidungsproblem: Gibt es einen Kreis dessen Länge höchstens k ist?
- Korollar: Das Problem des Handlungsreisenden ist NP-vollständig.
  - Das gilt auch für Euklidsche Distanzen.